

**А. Н. Ковалев**

## **ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ МОДУЛЕЙ В КОНТЕКСТЕ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. ПОЯВЛЕНИЕ ЦАРСКОГО ЛОКТЯ В ДРЕВНЕМ ЦАРСТВЕ ЕГИПТА**

*На основании анализа деревянных досок из мастабы Хесира предложена история появления царского локтя, начавшаяся с нахождения дроби  $7/8$  для равностороннего треугольника во времена фараона Джосера (XXVII в. до н. э.). Высказано предположение, что закреплению особого положения локтя в 7 ладоней, в том числе и в роли стандартной высоты для расчета наклона пирамиды, способствовало последовательное использование дробей  $7/4$  и  $7/5$  для  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{2}$  в Ломаной пирамиде Снофру,  $14/11$  — в пирамиде Хуфу. Показано, что при Джосере основным был модуль в 8 ладоней и длиной 63–63,5 см. Приведены факты, поддерживающие представление о применении этого модуля до Ломаной пирамиды Снофру включительно. Произведена реконструкция определения основных размеров этой пирамиды в модуле 63,2 см. Получается, что царский локоть, скорее всего, был введен при строительстве Розовой пирамиды в Дахшуре, а окончательно закреплён только при строительстве пирамид в Гизе. Проведен более тщательный, чем принято, математический анализ пропорций камер из трех пирамид Снофру, результаты которого говорят о развитии математики того времени в сторону поиска квазипифагоровых троек чисел.*

**Ключевые слова:** математика древнеегипетской архитектуры, эволюция мерных модулей, история царского локтя, квазипифагоровы тройки

**A. N. Kovalev**

## **EVOLUTION OF THE SYSTEM OF MODULES IN THE CONTEXT OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. THE APPEARANCE OF THE ROYAL CUBIT IN THE OLD KINGDOM OF EGYPT**

*Based on the analysis of wooden panels from the mastaba of Hesy-Ra, the story of the appearance of the royal cubit is presented. It started with finding the  $7/8$  fraction of an equilateral triangle during the time of Pharaoh Djoser (XXVII century BC). It is suggested that the sequential use of the fractions  $7/4$  and  $7/5$  for  $\sqrt{3}$  and  $\sqrt{2}$  in the Bent Pyramid of Snefru,  $14/11$  — in the pyramid of Khufu, has fixed the special positions of the elbow in 7 palms. It is shown that under Djoser, the main module was 8 palms with a length of 63–63.5 cm. Facts are presented that support the idea of using this module up to the construction of the Bent Pyramid of Snefru. The determination of the basic dimensions of this pyramid in the module 63.2 cm has been reconstructed. It turns out that the royal cubit, most likely, was introduced during the construction of the Red Pyramid in Dahshur and was finally fixed only during the construction of the pyramids in Giza. A more thorough than usual mathematical analysis of the proportions of the chambers from the three pyramids of Snefru was carried out, the results of which indicate the development of mathematics of the time towards the search for quasi-Pythagorean triples of numbers.*

**Keywords:** the mathematics of ancient Egyptian architecture, the evolution of dimensional modules, the history of the royal cubit, quasi-Pythagorean triplets

### **Введение**

Хотя царский локоть в 52,4 см первоначально был определен из размеров погребальных камер в Великой

пирамиде, его применяют при анализе и более ранней архитектуры. Частичная успешность этой экстраполяции не толкает исследователей пере-

смотреть время его появления. Лауэр писал: «...египетский царский локоть длиной от 0,5235 до 0,524 м» применялся «... во всех сооружениях Египта начиная с первых династий... Локоть, равный 0,52 м плюс несколько миллиметров, мог представлять среднюю величину локтей, принятых в Египте с тинисской эпохи» (Лауэр 1966: 138, 158). Но средний рост человека равен чуть меньше четырех его локтей, и высоту в 202–206 см никак нельзя назвать средним ростом первых веков египетской цивилизации<sup>1</sup>. В докторской диссертации А.П. Хирша «Древний египетский локоть» достаточно подробно разобраны имеющиеся на сегодня взгляды на историю происхождения царского локтя. Согласно приведенному там обзору, большинство авторов отталкивается от возможности существования в прошлом такого деления человеческого локтя (Hirsch 2013: 15–22). Между тем, Робинс в 1982 г. на основании измерения 60 древнеегипетских мумий писал, что среднее расстояние от локтевой кости до кончика пальцев было равно 46 см (*ibid*: 19).

А.П. Хирш в своей диссертации утверждает, что царский локоть появился между концом II и началом III династии, и с ним соотносима длина от 52,1 до 52,9 см (*ibid*: 50). Но если царский локоть определять этим диапазоном, то любая длина больше 34,5 м представима целым числом таких локтей, поскольку  $(52,5 \pm 0,4 \text{ м}) \times 66 = 34,65 \pm 0,264 \text{ м}$  — «вилка» погрешности становится больше царского локтя (rc). Если же диапазон возможных значений rc уменьшить до  $52,4 \pm 0,2 \text{ см}$ , то любая длина

больше 69 м представима целым числом таких локтей. Поэтому следует ограничить рассмотрение больших размеров хотя бы случаями, когда длина кратна 10 царским локтям. Но и при этом остается большая вероятность случайного совпадения. Так, при диапазоне локтя от 52,1 до 52,9 см вероятность любой длины от 100 до 250 м (характерные размеры мастабы и пирамиды), выбранной наугад, оказаться кратной 10 rc равна 0,5 — достаточно велика, чтобы ею пренебречь. Хирш пишет об обнаружении использования царского локтя в 9,93% исследованных случаев для Древнего царства (*ibid*: 50). Малый процент говорит о том, что он мог занижить время появления царского локтя, не учтя случайность совпадений. Поэтому можно говорить о применении царского локтя во времена, когда его существование предварительно не доказано, при длинах, кратных ста rc, в противном случае необходимы дополнительные поддерживающие доводы.

Экстраполяция факта его применения на более раннее время, чем строительство Великой пирамиды, часто толкает делать ничем особо не подтвержденный выбор. Так, погребальная камера пирамиды фараона Снофру (XXVII–XXVI вв. до н. э.) в Мейдуме имеет размеры  $5,90 \times 2,65 \text{ м}$  (Lehner 1997: 98) и пропорцию, близкую к 9/4, что позволяет выделить модуль в 65,5–66 см. Но  $2,65 \text{ м} = 5 \times 53 \text{ см}$ , а  $5,90 = 11 \times 53,6 \text{ см}$ , и принимают отношение размеров 11 : 5 с вариантом царского локтя в  $53,3 \pm 0,3 \text{ см}$ . Первоначальная длина основания пирамиды оценивается в 144 м (144,32 м — Петри), что приравнивается 275 rc. При этом царские локти погребальной камеры и длины основания различаются почти на 1 см! Между тем, принятый наклон боковой грани в 14 : 11 толкает ожидать выбор архитек-

<sup>1</sup> Согласно современным исследованиям, средний рост человека Бронзового века был 174 см (Бужилова 2005), которому соответствует локоть в 45 см, равный простому локтю Древнего Египта.

тором для основания величины, пропорциональной 22, и  $220 \times 65,6 \text{ см} = 144,32 \text{ м}$ . Поскольку  $65,6 \text{ см} \approx 5/4 \text{ рс}$ , то этот модуль не обнаруживается, несмотря на более точное описание им погребальной камеры, целые числа в пропорциях для нижней и ожидаемую величину основания в целых числах. Второй пример: первоначальные размеры квадратной мастабы фараона Джосера (основателя III династии) равны  $100 \times 63 \text{ см}$ . Выбор модуля в 63 см поддерживает внутренняя ширина комплекса в Саккаре в 277,6 м (ВИА 1970: 143), которая равна 440 единицам по 63,1 см. 440 рс равна длина основания Великой пирамиды, а выше полученное основание пирамиды в Мейдуме — 220 единиц длины, что может говорить о знаковости числа 22 (или 11) в рамках нумерологии египтян<sup>2</sup> и является косвенным доводом за верность вводимого модуля. Найденная летом 2018 г. в тайнике пирамиды Джосера в Саккаре бронзовая фигурка Осириса высотой  $63 \text{ см}^3$  поддерживает предлагаемый вариант. Но  $63 \text{ м} = 120 \times 52,5 \text{ см}$ , и египтологи считают, что был использован царский локоть. При этом ширина комплекса становится равной 530 рс. Как видно, более-менее удачное соответствие царскому локтю может быть следствием того, что реально использованные архитекторами модули близки к  $\frac{m}{n} \text{ рс}$ , где  $m$ ,  $n$  — небольшие числа. Возможно обратное: сам царский локоть мог произойти

от более раннего и большего модуля через простые дроби вида  $4/5$  или  $5/6$ , и выбор единицы длины следует делать исходя из соответствия получающихся чисел реконструируемому общему замыслу архитекторов древности.

Нестандартные длина и деление царского локтя, если оставаться в рамках наиболее естественного способа определения длин локтя и ладони, деленной на 4 пальца, могут быть связаны и с какими-то математическими соображениями и построениями. Одновременно отсутствие египетских математических папирусов III тыс. до н. э. и согласие историков науки считать часть материала из аналогичных источников, датированных началом II тыс. до н. э., более ранним поднимает проблему корректной экстраполяции математических знаний и навыков, выраженных в этих находках, на предшествующие столетия. И здесь тщательный анализ архитектурных памятников может оказать свою помощь. Таким образом, целью данного исследования является определение времени появления царского локтя и восстановление его истории на основании гипотезы о ее возможной связи с развитием математики.

Рассмотрим математическую сторону истории появления различных модулей длины. Применяемые в архитектуре Египта геометрические методы построения прямоугольников, перенос диагоналей и вписывание равнобедренных треугольников приводили к построению прямоугольников с отношением сторон, равным  $\sqrt{2} : 1$ ,  $\sqrt{2} : 2$ ,  $\sqrt{5} : 1$ ,  $\sqrt{5} : 2$  и  $\sqrt{3} : 2$ . Перенос диагонали квадрата и вписывание равностороннего треугольника обнаруживается при анализе гробницы в Негада (XXX в. до н. э.), принадлежащей I династии (ВИА 1970: 82–84, 139–140). Непосредственное использование веревочного метода переноса диагоналей в практике строительства, когда речь

<sup>2</sup> В мастабе Хесира было найдено 11 деревянных панелей. Число 11 могло носить религиозно-нумерологическую нагрузку, обуславливающую его применение в архитектуре.

<sup>3</sup> Хотя статуя датируется более поздним периодом (*Luxor Times* 2018), но ее высота не равна целому числу пальцев и, возможно, была выбрана, когда царский локоть еще окончательно не утвердился как эталон длины.

идет о десятках и даже сотнях метров, достаточно громоздко, что толкало к поиску третьей стороны прямоугольных треугольников, у которых: а) два катета равны; б) один катет в два раза больше второго и в) гипотенуза в два раза больше меньшего катета. В свою очередь, этот поиск был частью пути, приведшего к появлению модульного метода. Еще Петри, согласно написанному у Лельгеманн, читал в одном папирусе, что царский локоть был введен для построения гипотенузы квадрата со стороной в один ремен (rmp, 20 пальцев) (Lelgemann 2004). В данном тексте отражается представление как о математической природе причин введения царского локтя, так и о применении во время его введения дроби  $7/5$  для  $\sqrt{2}$ .

Одним из первых геометрических объектов, подвергнутых модуляции, был равносторонний треугольник. Эмпирическое нахождение для равностороннего треугольника отношения  $6/7$  или  $7/8$ , дающих приближение в 1%, могло подтолкнуть к введению царского локтя в 7 ладоней. На первый взгляд, более предпочтительной в роли триггера для рождения идеи ввести царский локоть представляется дробь  $6/7$ . Такой треугольник со стороной в царский локоть имел бы высоту в простой локоть. Но в этом случае предполагается, что простой локоть до введения царского уже был разбит на 6 ладоней, что требует подтверждения. На Палермском камне есть запись высоты подъема Нила, относящаяся к концу II династии, — «2 локтя, 6 ладоней, 2 пальца», что может трактоваться как довод в поддержку представления, что уже тогда был локоть в 7 ладоней, хотя одновременно может быть и свидетельством, что локоть и ладонь могли быть пока не связанными мерными величинами.

## Мерные модули во время правления III династии

Существование царского локтя до первой ступенчатой пирамиды особо не подтверждается критическим анализом архитектурных памятников. Проанализируем гипотезу его введения в XXVII в. до н. э., во время правления Джосера, когда жили Имхотеп («тот, кто приходит с миром») и Хесира («избранный богом солнца Ра»). Рассмотрим две (из 11) наиболее сохранившиеся деревянные панели из мастабы Хесира (ил. 1, 2). Разбор титулов из надписей на панели CG 1426 не говорит о положении Хесира как главного архитектора, но выделяет его, среди прочего, как «начальника над десятью королевскими писцами», священнослужителя Гора, ответственного за погребальный культ и главного врача фараона (Zingarelli 2017). Эти титулы ставят вопрос о возможности его отождествления с Имхотепом, могила которого так и не была найдена. В последнем случае изображение на деревянных панелях мерных инструментов архитектора представляется вполне уместным. Как следует из анализа деревянных панелей из гробницы Хесира, проведенного архитектором Шевелевым (Шевелев 1986), этот ученый придумал, как минимум, три модуля.

На панели CG 1427 зодчий держит в левой руке посох, а в правой — скипетр сехем. Шевелев считал, что их длины равны мерным модулям (Там же), а длина сехем — основному модулю, поскольку он присутствует на всех панелях. Посох примерно в  $\sqrt{5}$  раз больше скипетра, который имеет длину ( $l_1$ ), более всего соответствующую царскому локтю, если исходить из визуальной оценки и сравнения с ростом Хесира (ил. 1). Более точное измерение отношения тростей дает среднеарифметическое значение 2,245, что говорит о воз-

возможности его равенства дроби  $9/4$ . За то, что именно эта дробь рассматривается как приближение для  $\sqrt{5}$ , говорят пропорции рамки —  $5/8$ , в которую вписан архитектор. Такая дробь получается для  $\varphi$  (золотое сечение,  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots$ ), если применить это приближение для квадратного корня из пяти. Но дробь  $5/8$  могла быть использована и без связи с  $\varphi$ , и требуются дополнительные доводы в поддержку утверждения о нахождении дроби  $9/4$  для  $\sqrt{5}$ . Но если дробь  $9/4$  для  $\sqrt{5}$  была найдена во времена Джосера, то естественно считать, что именно она была использована в погребальной камере пирамиды Снофру в Мейдуме, чем менее точная  $11/5$ . Это увеличивает список поводов предпочесть для нее модуль в 65,5 см.

Отношение длин двух мерных тростей на деревянной панели CG 1426 из мастабы Хесира равно  $1,754 \pm 0,005$  ( $l_2:l_1$ ), что можно трактовать, как  $7/4$  (ил. 2). Это может говорить о том, что именно Хесира нашел и установил использование этой дроби для  $\sqrt{3}$ . На обеих представленных панелях рост архитектора в 2,8–2,85 раза больше длины скипетра. Если считать, что основной мерный жезл равен 8 ладоням или  $63,25 \pm 0,25$  см<sup>4</sup>, то Хесира имеет рост 179–180 см (примерно 22,5 ладони<sup>5</sup>) и ногу в 28–29 см, что представляется вполне вероятным. Длина верхней части левой ладони из 4 пальцев, в месте непосредственного контакта со скипетром, по измерению на панели CG 1426



Ил. 1. Панель CG 1427 из мастабы Хесира. Египетский музей, Каир. Фотография James Edward Quibell ([https://en.wikipedia.org/wiki/Mastaba\\_of\\_Hesy-Re](https://en.wikipedia.org/wiki/Mastaba_of_Hesy-Re))

<sup>4</sup> Такой размер имеет палетка Менеса (Нармера, основателя I династии) и бронзовая фигурка Осириса, найденная в пирамиде Джосера.

<sup>5</sup> В более поздней системе деления человека его рост был равен 22 ладони + выступ за пределы, примерно в пол ладони, соответствующий парюку. Рост по линии бровей — 3 царских локтя.

равна  $1/8$  части его длины. Правая рука, непропорционально узкая в ладони, указывает на стол с восьмью жертвенными хлебами, ширина каждого из которого равна ширине этой ладони в 4 пальца. И к этому можно добавить, что общая сумма обнаруженных фактов поддер-



Ил. 2. Панель CG 1426 из мастабы Хесира. Египетский музей, Каир. Фотография James Edward Quibell ([https://en.wikipedia.org/wiki/Mastaba\\_of\\_Hesy-Re](https://en.wikipedia.org/wiki/Mastaba_of_Hesy-Re))

живает правомерность этого отождествления. Выбор длины основного мерного инструмента в 8 ладоней мог быть обусловлен нахождением дроби  $7/8$  для равностороннего треугольника и  $9/8$  — для  $\sqrt{5}/2$ . В этом случае два других мерных «жезла» становятся равными цело-

му числу ладоней ( $l_2 = 110,6 \pm 0,35$  см;  $l_3 = 142,2 \pm 0,45$  см). Интересно отметить, что в диапазон для  $l_2$  попадает длина «Ниппурского локтя» (110,4 см), известного артефакта шумерской цивилизации, который датируется первой половиной III тыс. до н. э. и хранится в Стамбульском Археологическом музее (Unger 1927).

Афанасьев считает, что самая небольшая мерная трость в левой руке Хесира на деревянной панели CG 1427 из его погребения (ил. 1) была получена как деление самой длинной из трех тростей в  $2\sqrt{2}$  раз (Афанасьев 2000). Но если  $l_3 = 18$  пальцев, а  $\sqrt{2} = 7/5$ , то ее длина не получается целочисленной в пальцах. Согласно нашим замерам по рисунку, ее длина ( $l_4$ ) несколько меньше и ближе всего к  $11/14$  основного мерного модуля ( $l_4 = 11l_1/14 = 49,5-49,9$  см), что также не дает целое число пальцев, но толкает рассмотреть возможность знания уже тогда коэффициента геометрической прогрессии сторон прямоугольного треугольника. А нецелочисленность длины этой трости могла быть одним из поводов в последующем выбрать в качестве основного мерного модуля 7 ладоней.

Архитектор фараона Джосера находит, как минимум, приближения  $7/4$  и  $9/4$  для  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$ , что, скорее всего, сопровождалось развитием геометрических и алгебраических методов математики. Хесира, скорее всего, знает и формулу:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , о чем косвенно могут говорить пропорции прямоугольника (3 : 4) над его головой на панели CG 1427. Как известно, пропорции прямоугольников в древнеегипетской архитектуре имели геометрическое происхождение, а для отношения 3 : 4 священный египетский треугольник представляется единственным источником. О вероятном знании Хесира пифагоровой тройки (3, 4, 5) писал и К. Н. Афанасьев (Афанасьев 2000). Хотя убедительно (для египто-

логов) об этом знании свидетельствует только пирамида фараона VI династии Пепи I (XXIV–XXIII вв.), несмотря на соответствие ей четырех более ранних пирамид, начиная с Хефрена (Rossi 2003: 203, 219), и представления историков математики об ее знании, как минимум, во времена строительства Великой пирамиды (Щетников 2009: 210). Но вероятно, что пифагорова тройка (20, 21, 29), предположительно примененная в Розовой пирамиде (Rossi 2003: 203), была найдена ранее тройки (3, 4, 5). Скорее всего, для ее нахождения произвели перебор целых чисел  $n$ , удовлетворяющих условию:  $n + (n+1)^2 = m^2$ . При  $n < 100$  существуют только два решения:  $n = 3$  и  $20^6$ .

Более того, именно нахождение тройки (3, 4, 5) могло дать первоначальный толчок к развитию мерных единиц длины. В этом случае сначала вместе с природным (простым) локтем  $l_0$  появляется модуль в  $4/3$  его частей ( $l_1$ ), что толкает разделить первый на 3 части, а второй — на 4:  $l_0 = 3m$  и  $l_1 = 4m$ . 3 — мужское число, а 4 — женское и  $l_0$  становится вертикальным катетом такого треугольника, а  $l_1$  — горизонтальным, что потом отразится в тексте Плутарха<sup>7</sup>. Хесира, найдя приближения  $7/4$  и  $9/4$ , использует основной жезл длиной в  $4m$  в качестве горизонтального катета, а в  $7m$  — вертикального. Таким образом, для вертикали прямоугольных треугольников закрепляются два нечетных числа — 3 и 7, которые являются (или

со временем станут) числами Осириса. При этом появляется два новых мерных жезла в  $7m$  ( $l_2$ ) и  $9m$  ( $l_3$ ). На следующем шаге реформатор приравнивает мерный жезл  $l_1$  основанию равностороннего треугольника и стороне квадрата, что толкает выделить половину  $l_1$  для горизонтального катета прямоугольного треугольника  $7 : 4$ . Появление  $7/8$  и  $9/8$  частей  $l_1$  толкают к его делению на 8 частей, и Хесира, возможно, обнаруживает, что  $p = 1/8l_1 = 1/6l_0$  примерно равна ладони. Это справедливо считалось бы важным нововведением, и, вероятно, было отражено в рисунке на панели CG 1426. При этом модуль в  $7p$ , который потом станет царским локтем, при Джосере применяется, скорее всего, только для построения равносторонних треугольников.

Если отказаться от приоритета царского локтя и его делителей и искать мерные модули, исходя из подходящих дробей<sup>8</sup>, то для двух погребальных камер ступенчатых пирамид III династии получим результат, приведенный в таблице. На первый взгляд, погребальная камера фараона Сехемхета (XXVI в. до н. э.) является достаточно убедительным свидетельством применения классического царского локтя, но, как следует из таблицы, в равной степени мог применяться и модуль  $74,4$  см — вариант шага. Отличие высоты камеры от целого числа модулей в случае царского локтя составляет  $3,3\%$ , а во втором —  $1,7\%$ , что толкает предпочесть второй вариант. Отметим, что эти подходящие дроби — приближения для  $\sqrt{3}$ , но  $12/7$  в два раза лучше  $17/10$  ( $\epsilon = 1$  и  $1,9\%$ ). После предполагаемого нахождения во времена Джосера для  $\sqrt{3}$  дроби  $7/4$  ( $a_1$ ) использование дроби  $17/10$  было бы проявлением возврата к архаике, в то время как дробь

<sup>6</sup> Следующее решение  $n = 119$ .

<sup>7</sup> «Этот треугольник имеет катет из трех частей, основание — из четырех и гипотенузу — из пяти... Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих. Также Осириса можно считать началом, Исиду — вместилищем, а Гора — исходом» (Плутарх. Об Исиде и Осирисе: 56).

<sup>8</sup> Наилучшие дробные приближения для числа, находимые методом Евклида.

Таблица

## Подходящие дроби и модули для погребальных камер

№	Фараон/место	Размер (см)	Пропорция	Отклонение $\epsilon$ , %	Модуль $m$ (см)
1	Сехемхет Sekhemkhet	890 × 522 h = 455	а) 12 : 7 б) 17 : 10	0,5 0,3	74,4 ± 0,2 52,3 ± 0,1
2	Завиет-эль-Эриан Zawiyet el-Aryan	363 × 265 h = 300 ± 10	11 : 8 9	0,4	33,06 ± 0,06

Источник: (Lehner 1997: 94–95)

12/7 ( $a_2$ ) могла появиться из  $a_1 \times a_2 = 3$ . По сути, есть только одна причина предпочесть царский локоть — спонтанная экстраполяция в прошлое унификации мерной системы — многие исследователи склонны выбрать то, к чему уже привыкли. В случае погребальной камеры в Завиет-эль-Эриан получается мерный модуль почти такой же, как и в случае саркофага первой ступенчатой пирамиды Джосера, размеры которого, 2,96 × 1,65 × 1,65 м (Lehner 1997: 88) имеют пропорцию 9 : 5 : 5 и мерный модуль в 32,95 ± 0,05 см. Возможно, они имеют один источник. На шумерском «Ниппурском локте» третья справа риска выделяет длину от правого конца в 32,95 см (Unger 1927), которая, как считается, могла быть первоисточником более позднего вавилонского фута в 33 см. Это второй пример возможной связи мерных модулей Шумера и Египта.

В Бет-Халлафе, в 23 км к северу от царского некрополя в Абидосе, находится гробница — мастаба размерами 91,4 × 45,7 м. Ее датируют чуть более поздним временем, чем первую ступенчатую пирамиду (Veygall 2018: 174–175). В царских локтях она равна 87 × 174 (rc = 52,5 см), а в основных мерных модулях Хесира — 144 × 72 ( $l_1 = 63,5$  см). И если причины выбора именно такого размера в царских локтях не ясны, то в основных мерных модулях Хесира — сразу видны, поскольку (72, 144, 161) —

квазипифагорова тройка<sup>9</sup>. 161/72 — подходящая дробь для  $\sqrt{5}$  ( $\epsilon = 0,002\%$ ). Отличие диагонали от  $161 \times l_1$  (102 м) меньше 2 мм — в практике строительства того времени не обнаруживаемая величина. При незнании теоремы Пифагора дробь 161/72 считалась бы точным значением  $\sqrt{5}$ . И «точные» дроби для квадратных корней могли быть в списке первых цеховых секретов «ордена» жрецов-архитекторов. Здесь проявляется тема возможности потери части математических знаний в Древнем Египте из-за чрезмерной их сокрытости. 161/72 точнее дроби 123/55, которую, предположительно, могли использовать позже при строительстве Великой пирамиды (Щетников 2009). А 123/55, в свою очередь, точнее используемой позднее в архитектуре дроби 9/4.

### Пирамиды Снофру

Пирамида в Мейдуме, как писалось выше, позволяет выделить мерный модуль в 65,5–66 см. При этом длина входного коридора (5785 см) равна 88 × 65,7 см, где ее пропорциональность в модулях числу 22 поддерживает об-

<sup>9</sup> Тройка целых чисел, квадрат третьей из которых примерно равен сумме квадратов первых двух. Возникают при анализе пропорций и прямоугольных треугольников в архитектуре. Подходящая дробь для квадратного корня из целого числа связана с такой тройкой чисел.



щий замысел. Обнаруживается возможная связь с мерным модулем саркофага в первой ступенчатой пирамиде и погребальной камеры в Завиет-эль-Эриан, в которых он в два раза меньше. Возможно, и в пирамиде применяемый модуль был в два раза меньше (32,8–33 см), поскольку высота коридора (165 см) равна  $5 \times 33$  см. Величина модуля этой пирамиды может быть связана со стелой Джета в Абидосе как культовым предметом, ширина которой равна 65,9 см, и с Ниппурским локтем, на котором выделяется модуль (фут) в 32,95 см.

Размах основания Ломаной пирамиды Снофру считается равным 362 гс (Rossi 2003: 197), но он равен и 300 основным модулям по 63,2 см ( $l_1$ ). 362 не делится на 5, а значит этому плану соответствовала бы нецелочисленная высота, что представляется маловероятным. Предполагается, что Ломаная пирамида задумывалась как имеющая угол наклона боковой грани в  $60^\circ$ , который в плане соответствовал наклону  $7/4$ , потом уменьшенному до  $7/5$  за счет увеличения размеров основания (Maragioglio, Rinaldi 1964: 58). Скорее всего, наклон  $7/5$  — приближение для  $\sqrt{2}$  (Rossi 2003: 208), которое было получено первым при появлении потребности в замене точного, но трудоемкого геометрического построения на месте приближенным модульным вариантом. При наклоне в  $\sqrt{2}$  боковая грань — равносторонний треугольник. За модуль в  $l_1$  и длина северного коридора, которая равна  $20l_1$  (Irigaray 2020: 18). Верхняя камера имеет размеры  $526 \times 797$  см (Lehner 1997: 102), пол которой находится на высоте  $5l_1$ . Приняв отношение сторон  $2 : 3$ , получим модуль в  $52,87 \pm 0,27$  см, который с натяжкой можно отождествить с царским локтем, тем более что отношение размеров отличается от  $2 : 3$  на 1% — слишком много по сравнению с точно-

стью выполнения других погребальных камер в пирамидах Снофру<sup>10</sup>. Но если считать, что строители достаточно точно выверили ее размеры, то она имеет пропорцию  $33 : 50$ . При этом выделяется модуль ( $m$ ) в 15,9 см, равный  $\frac{1}{4} l_1$  (2 ладони). Диагональ камеры равна примерно  $60m$  ( $\epsilon = 0,15\%$ ). Нижняя камера имеет размеры  $630 \times 496$  см (*ibid*), и подходящая дробь для нее —  $14 : 11$ . Ее размеры можно интерпретировать как  $10l_1 \times 10l_4$ , но они считаются равными  $12 \times 9,5$  гс ( $24 : 19$ ). Отношение  $24 : 19$  дает худшее приближение к обмерам, чем  $14 : 11$  (0,55% против 0,2%), и требует нахождения причин его выбора. Дробь  $14/11$  применена в пирамиде Хуфу и, возможно, в пирамиде Снофру в Мейдуме (Rossi 2003: 215–216). В этой камере отношение диагонали к меньшей стороне равно числу Фидия ( $\Phi = 1,618\dots$ , отклонение меньше погрешности обмера), ее стороны и диагональ дают очень хорошее приближение к геометрической прогрессии, которую задает только одна пифагорова тройка ( $1, \sqrt{\Phi}, \Phi$ ). При использовании царского локтя для анализа пропорций этой камеры эта особенность не обнаруживается. Ломаная пирамида может быть примером одновременного использования в архитектуре сразу нескольких модулей.

Найденный в 1982 г. рядом с Розовой пирамидой разбитый пирамидион, согласно реконструкции, имел основание 157–158 см (*ibid*: 209). Коринна Росси определяет наклон его боковой грани как  $7 : 5$  и относит ко второй фазе Ломаной пирамиды (Rossi 1999). Тогда его высота была равна  $2 + 1/10$  гс, появление в которой  $1/10$  гс — следствие определения размеров в царских локтях.

<sup>10</sup> В Розовой пирамиде отличие отношения размеров камер от «теоретической» не превышает 0,4%.

Но  $1/10$  длины основания равна  $\frac{1}{4}l_1$  ( $\epsilon = 0,3\%$  — не больше погрешности реконструкции) — тот же модуль, что был получен для верхней камеры этой пирамиды. Тогда основание равно  $2,5l_1$  или 20 ладоням, а высота —  $l_2$  или 14 ладоней, где ладонь определяется как  $\frac{1}{8}l_1$ .

Размеры пирамиды — спутника Ломаной (основание  $\approx 52,5$  м), как и Розовой пирамиды в Дахшуре ( $220 \times 105$  м) говорят об использовании уже царского локтя. О применении царского локтя в 52,2 см в последней говорят размеры погребальных камер: Нижней,  $365 \times 836$  см (Lehner 1997: 104), пропорция которой очень близка к  $7/16$ , что выделяет модуль в 52,2 см; и Верхней,  $418 \times 835$  см (Irigaray 2020: 33), интерпретируемые как  $8 \times 16$  рс. Выбор пропорции для Нижней можно объяснить вписыванием в прямоугольник основания двух равносторонних треугольников.

Эти факты позволяют предположить, что царский локоть в  $52,4 \pm 0,2$  см был введен при фараоне Снофру — отце Хуфу, но только в самом конце истории строительства пирамид при нем. При этом произошло уменьшение длины «ладони». Интересно отметить, что на Палермском камне первое использование сочетания «королевская ладонь» относится ко времени Снофру. Остается вопрос о способе получения величины этого локтя из более ранних модулей. Можно предположить, например, что его уменьшение (от  $\frac{7}{8}l_1$ ) могло быть подержано приравнением 4-х простых локтей реальному размаху рук, что с неизбежностью приводило к уменьшению и царского локтя. Но он мог появиться и каким-либо другим образом. Для ответа на этот вопрос требуются дополнительные исследования.

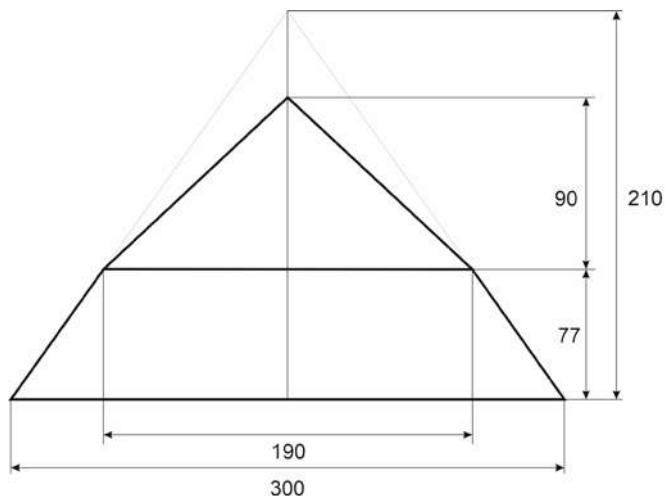
Предполагаемое введение царского локтя при переходе от Ломаной к Розо-

вой пирамиде и допустимость факта излома как части проекта (Nuzzolo 2015) заставляют внимательнее проанализировать первую. Но у историков архитектуры нет общего согласия относительно ее пропорций (Rossi 2003: 224–225), ее основные размеры, как отмечает Щетников, внутренне противоречивы (Щетников 2009: 211–212). Наклон верхней части, при существующей погрешности измерений, может быть от 16 : 17 до 21 : 22. Высота излома точно не измерена, а выбрана округло в 90 рс. Исходя из этого выбора, Петри указал «точную» ее высоту 47,17 м, но позже Хассан получил свой вариант высоты — 49,07 м (Fakhry 1954). Предлагаемый Лауэром наклон 17 : 18 при высоте пирамиды 200 рс и основании 362 рс дает высоту излома 89,3 рс, а при наклоне 20 : 21 ее высота получается 86,4 рс (45,27 м). При всех возможных значениях наклона и выбранных размерах пирамиды (+ вариант основания в 360 рс по 52,67 см) высота излома не получается равной целому числу царских локтей, что представляется маловероятным, если излом пирамиды был в проекте. Но целые и достаточно округлые числа получаются, если считать, что в пирамиде применен основной мерный модуль. Тогда существующим обмерам удовлетворяют два варианта с наклоном верхней части 18 : 19 и 19 : 20, первый из которых представлен на ил. 3<sup>11</sup>. При этом высота излома равна 48,7 м, а высота пирамиды — 105,5 м.

Согласно математическим папирусам начала II тысячелетия до н. э., наклон в древнем Египте определялся по длине горизонтального катета (секеду) при постоянной высоте в 1 локоть, что дало повод предположить, что секед применялся во время строительства настоя-

<sup>11</sup> Второй вариант: высота излома — 70 ом, общая — 165 ом (104,3 м).

Ил. 3. Размеры Ломаной пирамиды в основных модулях по 63,2 см (чертеж автора)



щих пирамид Древнего царства (*Robins 1985*). Секед в 4 пальмы — для равносоставленного треугольника; 5 пальм — наклон  $7/5$  — подходящая дробь для  $\sqrt{2}$  ( $\epsilon = 1\%$ ), построенная по нему пирамида очень близка к половине правильного октаэдра, у которого боковая грань — равносоставленный треугольник (Ломаная пирамида Снофру и две пирамиды Аменемхета III); 21 палец — наклон  $4/3$  (священный египетский треугольник, 8 пирамид Древнего царства); 22 пальца — наклон  $14/11$  (пирамида в Мейдуме и Великая пирамида). Выбор модуля, деленного на 28 частей, в качестве эталона для вертикали оказался достаточно удобным, и его использование закрепило выделенное положение царского локтя. Скорее всего, этот способ определять наклон боковых граней пирамид появляется только после их строительства в Гизе — пирамида Хефрена, несмотря на ее секед, могла быть построена без его использования — ее высота, скорее всего, не была равна целому числу локтей (*Щетников 2009: 207*), а наклон пирамиды Микерина ( $5 : 4$ ) плохо выражается в секедах.

Скорее всего, только после возведения Великой пирамиды, высота которой равна 280 рс, локоть в 52,4 см окончательно замещает основной мерный модуль Хесира и закрепляется, поскольку удобство использования длины в 7 единиц в качестве стандартной высоты при выборе наклона пирамид подтверждается и для уже существующего деления такого модуля на 28 единиц. Но след применения основного модуля Хесира в 63,5 см может присутствовать и в пирамиде Хуфу. По подсчетам Ф. Петри, средний размер блока был равен  $127 \times 127 \times 71$  см (*Непомнящий 1998*) или  $2l_1 \times 2l_1 \times 9/8l_1 (l_1/2)$ , т. е. такой размер блоков мог быть принят еще во времена строительства первой Ступенчатой пирамиды. Интересно, что еще в 1867 г. Ч. Смит приводит два значения локтя для Великой пирамиды: 52 и 63,5 см (*Smyth 1867*). А L. Borchardt в своей «Gegen die Zahlenmystik an der großen Pyramide bei Gize» писал в 1922 г., что царский локоть в 52,5 см в ней редок, предпочтительнее «стандартная» длина в 63,5 см (*Borchardt 1922*).

Но от применения мерных модулей Хесира в искусстве, скорее всего,

не сразу отказались. Так, статуя фараона Микерина с женой (IV династия), хранящаяся в музее Изыщных Искусств в Бостоне, имеет высоту и ширину основания точно равные  $l_3$  и  $1/2 l_2$  (142,2 и 55,2 см). Это мнение поддерживает и более поздняя датировка статуи Осириса (высота  $l_1$ ), найденной летом 2018 г. в пирамиде Джосера.

\*\*\*

Предлагаемая реконструкция истории появления царского локтя говорит о возможности определения величин (и структуры) некоторых мерных единиц длины на раннем этапе развития архитектуры, исходя не из природного соответствия или визуального чувства гармоничности, и в результате развития математики, что ранее особо не рассматривалось. При этом конкретные ее достижения приобретают религиозный характер, который отражается в нумерологических представлениях. Так, закрепление использования локтя в 7 ладоней могло предваряться и сопровождаться насыщением религиозным содержанием числа 7, его соотношения Осирису. Здесь стоит вспомнить не только выделение этого числа в мифе об Осирисе<sup>12</sup>, но выделение на небе в созвездии Орион, связываемым с ним, 7 ярких звезд, по принципу 3 + 4. Ведь пирамида — не просто усыпальница, а по религиозным представлениям — «лестница», обеспечивающая путь к звездам Ка фараона, слившейся с Осирисом.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

*Luxor Times* — The God statue Discovered in the First Ancient Egyptian Pyramid // *Luxor Times*. July 1. 2018.

*Афанасьев* 2000 — *Афанасьев К. Н.* Опыт пропорционального анализа // *Материалы ICOMOS*. Вып. 1. М., 2000.

*Бужилова* 2005 — *Бужилова А. П.* Homo sapiens: история болезни. М.: Языки славянской культуры, 2005.

*ВИА* 1970 — Всеобщая история архитектуры. В 12 т. Т. I. Архитектура древнего мира. М.: Стройиздат, 1970.

*Вейгалл* 2018 — *Вейгалл А.* История фараонов. Правящие династии раннего, Древнего и Среднего царства Египта. 3000–1800 до н. э. / пер. с англ. И. Б. Куликовой. М.: ЗАО Центрполиграф, 2018.

*Лауэр* 1966 — *Лауэр Ж.-Ф.* Загадки египетских пирамид. М.: Наука, 1966.

*Непомнящий* 1998 — *Непомнящий Н. Н.* По следам великанов. М.: Олимп; АСТ, 1998.

*Шевелев* 1986 — *Шевелев И. Ш.* Принцип пропорции. О формообразовании в природе, мерной трости древнего зодчего, архитектурном образе, двойном квадрате и взаимопроникающих подобиях. М.: Стройиздат, 1986.

*Щетников* 2009 — *Щетников А. И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // *Историко-математические исследования*. 2009. Вып. 13 (48). С. 198–216.

*Borchardt* 1922 — *Borchardt L.* *Gegen die Zahlenmystik an der großen Pyramide bei Gize*. Berlin: Behrend, 1922.

*Rossi* 1999 — *Rossi C.* *Note on the Pyramidion Found at Dahshur* // *The Journal of Egyptian Archaeology*. 85. 1999. P. 219–222.

*Rossi* 2003 — *Rossi C.* *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*. Cambridge University press, 2003.

*Fakhry* 1954 — *Fakhry A., Mustapha H., Rieke H.* *The Bent Pyramid of Dahshur*. Le Caire: Imprimerie de l'Institut Francais D'archeologie Orientale, 1954.

*Hirsch* 2013 — *Hirsch A. P.* *Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution*. PhD thesis. Toronto, 2013.

*Irigaray* 2020 — *Irigaray C.* *The Pyramids of Sneferu*. Montevideo, 2020.

*Lehner* 1997 — *Lehner M.* *The complete pyramids*. London: Thames & Hudson, 1997.

*Lelgemann* 2004 — *Lelgemann D.* *Recovery of the Ancient System of Foot/Cubit/Stadi-*

<sup>12</sup> Осирис был убит своим братом Сетом на 28 году жизни. Сет расчленил тело убитого им Осириса на 14 частей, разбросав по 7 частей в Верхнем и Нижнем Египте.

- on — Length Units // History of Surveying and Measurement. Athens. May 22–27. 2004.
- Maragioglio, Rinaldi 1964 — Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Memfite. Parte III. Il Complesso di Meydum, la piramide a Doppia Pendenza e la piramide Settentrionale in Pietra di Dahsciur. Torino: Artale, 1964.
- Nuzzolo 2015 — Nuzzolo M. The Bent Pyramid of Snefru at Dahshur. A project failure or an intentional architectural framework // Studien zur Altägyptischen Kultur. Bd. 44. 2015. P. 259–282.
- Robins 1985 — Robins G., Charles C.D. Shute. Mathematical Based of Ancient Egyptian architecture and graphic art // Historia Mathematica. 1985. Vol. 12. No. 2. P. 107–122.
- Smyth 1867 — Smyth C.P. Life and Work at the Great Pyramid of Jeezeh. Edinburgh: Edmonton and Douglas, 1867.
- Unger 1927 — Unger E. Die Nippur-Elle. Publikationen der Kais. Osman. Museen, Konstantinopel, 1916 ders. Eberts Reallexikon, Stichwort Nippur-Elle. Bd. VIII. 1927.
- Zingarelli 2017 — Zingarelli A.P. and other. The first known Egyptian physician/dentist: Artefacts in the Museum of La Plata (Argentina) // Journal of the International Society for the History of Medicine. 2017. Vol. XXIII. No. 1. P. 66–78.
- Afanas'ev K.N. Opyt proporsional'nogo analiza (Proportional Analysis Experience). ICOMOS, Iss. 1. Moscow, 2000 (in Russian).
- Buzhilova A.P. Homo sapiens: istoriia bolezni (Homo sapiens: disease history). Moscow: lazki slavianskoi kul'tury Publ., 2005 (in Russian).
- Vseobshchaia istoriia arkhitektury. V 12 t. T.I. Arkhitektura drevnego mira. (General history of architecture. Vol. I. Ancient architecture). Moscow: Izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu Publ., 1970 (in Russian).
- Veigall A. Istoriia faraonov. Praviashchie dinastii rannego, Drevnego i Srednego tsarstva Egipta. 3000–1800 do n. e. (History of the pharaohs. Ruling dynasties of the Early, Old and Middle Kingdoms of Egypt. 3000–1800 BC). Trans. from English I.B. Kulikova. Moscow: ZAO Tsentropoligraf Publ., 2018 (in Russian).
- Lauer Zh.-F. Zagadki egipetskich pyramid (The mysteries of the Egyptian pyramids). Moscow: Nauka Publ., 1966 (in Russian).
- Nepomniashchii N.N. Po sledam velikanov (In the footsteps of the giants). Moscow: Olimp; ACT Publ., 1998 (in Russian).
- Shevelev I.Sh. Printsip proporsitsii: O formoobrazovanii v prirode, mernoj trosti drevnego zodchego, arkhitekturnom obraze, dvoimom kvadrate i vzaimopronikaushchikh podobiiakh (The principle of proportion: About the formation in nature, the measuring stick of the ancient architect, the architectural image, the double square and interpenetrating similarities). Moscow: Stroizdat Publ., 1986 (in Russian).
- Shchetnikov A.I. Zolotoe sechenie, kvadratnye korni i proporsitsii piramid v Gize (Golden ratio, square roots and proportions of the pyramids at Giza). Istoriko-matematicheskie issledovaniia (Historical and mathematical research), vol. 13 (48), 2009, pp. 198–216 (in Russian).
- Borchardt L. Gegen die Zahlenmystik an der großen Pyramide bei Gize. Berlin: Behrend Publ., 1922.
- Rossi C. Note on the Pyramidion Found at Dahshur. The Journal of Egyptian Archaeology, 85, 1999, pp. 219–222.
- Rossi C. Architecture and mathematics in Ancient Egypt. Cambridge University press, 2003.
- Fakhry A., Mustapha H., Ricke H., The Bent Pyramid of Dahshur. Le Caire: Imprimerie de l'institut Francais D'archeologie Orientale Publ., 1954.
- Hirsch A.P. Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution. PhD thesis. Toronto, 2013.
- Irigaray C. The Pyramids of Sneferu. Montevideo, 2020.
- Lehner M. The complete pyramids. London: Thames & Hudson Publ., 1997.
- Leigemann D. Recovery of the Ancient System of Foot/Cubit/Stadion — Length Units. History of Surveying and Measurement. Athens, May 22–27, 2004.
- Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Memfite, Parte III, Il Complesso di Meydum, la piramide a Doppia Pendenza e la piramide Settentrionale in Pietra di Dahsciur. Torino: Artale Publ., 1964.

- Nuzzolo M. The Bent Pyramid of Snefru at Dahshur. A project failure or an intentional architectural framework. *Studien zur Altägyptischen Kultur*, bd. 44, 2015, pp. 259–282.
- Robins G., Charles C.D. Shute. Mathematical Based of Ancient Egyptian architecture and graphic art. *Historia Mathematica*, vol. 12, no. 2, 1985. pp. 107–122.
- Smyth C. P. *Life and Work at the Great Pyramid of Jeezeh*. Edinburgh: Edmonton and Douglas Publ., 1867.
- Unger E. *Die Nippur-Elle, Publikationen der Kais. Osman. Museen, Konstantinopel, 1916 ders. Eberts Reallexikon, Stichwort Nippur-Elle*, bd. VIII, 1927.
- Zingarelli A.P. and other. The first known Egyptian physician/dentist: Artefacts in the Museum of La Plata (Argentina). *Journal of the International Society for the History of Medicine*, vol. XXIII, no. 1, 2017, pp. 66–78.